Prof. Dr. Armin Iske
Dr. Andreas Vollmer
M.Sc. Lars Poppe

Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg
Wintersemester 2022/23

Übungen zu Analysis 1

Aufgaben des Tages 5 — Musterlösung

Aufgabe 1: *(3+1 Punkte)* Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl.

(a) Zeige per Induktion: Für alle $m, k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq m+n$ gilt

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{m}{\ell}\binom{n}{k-\ell}.$$

(b) Folgere aus Aufgabenteil (a) die Allgemeingültigkeit der Aussage

$$\binom{2n}{n} = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{l}^2 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Lösung. Wir beweisen erst die Formel aus (a) über Induktion nach $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang: Sei $n = 1$ und $m, k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq m+1$. Dann gilt

$$\sum_{\ell=0}^{k} \binom{m}{\ell}\binom{1}{k-\ell} = \binom{m}{k}\binom{1}{0} + \binom{m}{k-1}\binom{1}{1} = \binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} = \binom{m+1}{k},$$

da alle anderen Terme der Summe verschwinden und mit der Rekursionsregel.

Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung aus (a) gelte für $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschluss: Seien $m, k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq m + (n+1)$ fixiert. Wir betrachten zunächst die "Grenzfälle" $k = 1$ und $k = m + (n+1)$: Für $k = 1$ gilt

$$\sum_{\ell=0}^{1} \binom{m}{\ell}\binom{n+1}{1-\ell} = \binom{m}{0}\binom{n+1}{1} + \binom{m}{1}\binom{n+1}{0} = m + (n+1) = \binom{m+(n+1)}{1}$$

und für $k = m + (n+1)$ gilt

$$\sum_{\ell=0}^{m+(n+1)} \binom{m}{l}\binom{n+1}{(m+(n+1))-\ell} = \binom{m}{m}\binom{n+1}{n+1} = 1 = \binom{m+(n+1)}{m+(n+1)},$$

da alle Terme der ersten Summe abgesehen von für $l = m$ verschwinden. Sei schließlich $1 < k < m + (n + 1)$, dann benutzen wir die IV und finden

$$\begin{aligned}\binom{m+(n+1)}{k} &= \binom{m+n}{k-1} + \binom{m+n}{k} = \sum_{\ell=0}^{k-1} \binom{m}{\ell}\binom{n}{k-1-\ell} + \sum_{\ell=0}^{k} \binom{m}{\ell}\binom{n}{k-\ell} \\ &= \sum_{\ell=0}^{k-1} \binom{m}{\ell}\left(\binom{n}{k-1-\ell} + \binom{n}{k-\ell}\right) + \binom{m}{k}\binom{n}{0} \\ &= \sum_{\ell=0}^{k-1} \binom{m}{\ell}\binom{n+1}{k-\ell} + \binom{m}{k}\binom{n+1}{0} = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{m}{\ell}\binom{n+1}{k-\ell}.\end{aligned}$$

Für die Formel aus (b) setzen wir schließlich $m = n$ und berechnen

$$\binom{2n}{n} = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell}\binom{n}{n-\ell} = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell}^2$$

mit der Symmetrieregel. ■

Aufgabe 2: *(2+1+1+2 Punkte)*
In dieser Aufgabe diskutieren wir Umgebungen von Punkten in metrischen Räumen.

Definition: Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $U \subset X$ wird als *Umgebung* eines Punktes $x_0 \in U$ bezeichnet, falls eine offene Menge $V \subset U$ mit $x_0 \in V$ existiert.

(a) Sei (X, d) ein metrischer Raum, $U \subset X$ eine Teilmenge von X und $x_0 \in U$. Zeige, dass U genau dann eine *Umgebung* von $x_0 \in U$ ist, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $B(x_0, \varepsilon) \subset U$.

(b) Zeige, dass die Äquivalenz in (a) weiterhin gilt, wenn in der dortigen Formulierung *abgeschlossene* Kugeln $B[x_0, \varepsilon] \subset U$ statt offener Kugeln $B(x_0, \varepsilon) \subset U$ verlangt werden.

(c) Zeige, dass eine Teilmenge $O \subset X$ in einem metrischen Raum (X, d) genau dann offen ist, wenn O eine Umgebung von allen Punkten $x_0 \in O$ ist.

(d) Betrachte die folgenden Teilmengen des metrischen Raums $(\mathbb{R}, d)$ mit Betragsmetrik d.

$$M_1 = [5, \infty), \qquad M_2 = \{4\} \cup ([5, 7) \backslash \{6\}), \qquad M_3 = \bigcap_{n=1}^{\infty} (0, 1 + 1/n).$$

Für welche ihrer Punkte sind $M_1, M_2, M_3 \subset \mathbb{R}$ Umgebungen und für welche nicht?

Lösung. (a): Sei zuerst $U \subset X$ eine Umgebung von $x_0 \in U$. Dann existiert eine offene Menge $V \subset X$ mit $x_0 \in V$ und $V \subset U$. Wegen $x_0 \in V$ existiert insbesondere ein $\varepsilon > 0$ mit

$$B(x_0, \varepsilon) \subset V \subset U.$$

Existiere umgekehrt ein $\varepsilon > 0$ mit $B(x_0, \varepsilon) \subset U$. Dann ist $B(x_0, \varepsilon)$ aber auch offen und wir können $V = B(x_0, \varepsilon)$ setzen.

(b): Wir bemerken, dass jede offene Kugel eine abgeschlossene Kugel enthält ($B[x_0, \varepsilon/2] \subset B(x_0, \varepsilon)$) und umgekehrt ($B(x_0, \varepsilon/2) \subset B[x_0, \varepsilon]$). Daraus folgt die Behauptung sofort.

(c): Die Menge $O \subset X$ ist genau dann offen, wenn für alle $x_0 \in O$ ein $r = r(x_0) > 0$ existiert mit $B(x_0, r) \subset O$ und das ist nach (b) gleichwertig dazu, dass O eine Umgebung von allen $x_0 \in O$ ist.

(d): Wir erinnern, dass offene Kugeln $B(x_0, \varepsilon) \subset \mathbb{R}$ die offenen Intervalle $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ sind. Insofern ist M_1 eine Umgebung von allen Punkten abgesehen von $5 \in \mathbb{R}$. Angenommen, M_1 wäre auch eine Umgebung von 5, aber jedes Intervall $(5 - \varepsilon, 5 + \varepsilon)$ schneidet das Komplement von M_1. Also kann M_1 keine Umgebung von 5 sein. Selbiges gilt für 4 und 5 bezüglich M_2 während M_2 eine Umgebung aller anderen Punkte ist. Die Menge M_3 enthält ferner das offene Intervall $(0, 1)$, also ist sie eine Umgebung aller Punkte in $(0, 1)$ während sie keine Umgebung von $1 \in \mathbb{R}$ sein kann, da wir für jedes Intervall $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ die Zahl $n \in \mathbb{N}$ großgenug wählen können, sodass das Intervall nicht mehr im Schnitt liegt.

■